

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Проректор по учебной работе**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Гармонический анализ
<b>по направлению:</b>	Биотехнология
<b>профиль подготовки:</b>	Управление инновациями в бизнесе Физтех-школа бизнеса высоких технологий кафедра высшей математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.А. Скубачевский, канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 23.11.2023

## Аннотация

Гармонический анализ — раздел математики, изучающий свойства функций на основе их представления в виде тригонометрических рядов или интегралов. В курсе рассматриваются классические вопросы теории рядов Фурье: поточечная и равномерная сходимости, интегрирование, порядок убывания коэффициентов, обобщенное суммирование. Приводятся базовые сведения из функционального анализа, рассматриваются банаховы пространства, полные системы в общих евклидовых пространствах. Изучаются интегралы с параметром (в т.ч. и интегралы Эйлера). На их основе вводится преобразование Фурье, рассматриваются его основные свойства. Вводятся некоторые классы обобщенных функций, кратко изучаются операции над ними и их базовые свойства.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- формирование систематических знаний о методах математического анализа, расширение и углубление таких понятий как функция и ряд.

#### Задачи дисциплины

- формирование у обучающихся теоретических знаний и практических навыков в теории тригонометрических рядов Фурье и началах функционального анализа;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в применении методов математического анализа в физике и других естественнонаучных дисциплинах.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные факты теории тригонометрических рядов Фурье абсолютно интегрируемых функций: достаточные условия поточечной и равномерной сходимости;
- теоремы о поточечном интегрировании и дифференцировании, порядке убывания коэффициентов, теорему о суммировании рядов Фурье методом средних арифметических и ее применения;
- определение сходимости в метрических и линейных нормированных пространствах, примеры полных и неполных пространств;
- примеры полных систем в линейных нормированных пространствах;
- основные понятия теории рядов Фурье по ортонормированной системе в бесконечномерном евклидовом пространстве;
- определения собственных и несобственных интегралов, зависящих от параметра, их свойства; теоремы о непрерывности, дифференцировании и интегрировании по параметру несобственных интегралов, их применение к вычислению интегралов;
- достаточное условие представления функции интегралом Фурье;
- преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства;
- основные понятия теории обобщенных функций, преобразование Фурье обобщенных функций, его свойства.

уметь:

- разлагать функции в тригонометрический ряд Фурье, исследовать его на равномерную сходимость, определять порядок убывания коэффициентов Фурье;
- исследовать полноту систем в функциональных пространствах;
- исследовать сходимость и равномерную сходимость несобственных интегралов с параметром, дифференцировать и интегрировать их по параметру;
- представлять функции интегралом Фурье; выполнять преобразования Фурье;
- оперировать с обобщенными функциями.

владеть:

- мышлением, методами доказательств математических утверждений;
- навыками работы с рядами и интегралами Фурье в различных формах;
- навыками применения изученной теории в математических и физических приложениях;
- умением пользоваться необходимой литературой для решения задач.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций.	5	5		7
2	Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических.	2	1		5
3	Метрические и линейные нормированные пространства.	4	4		4
4	Бесконечномерные евклидовы пространства.	4	4		4
5	Тригонометрические ряды Фурье для функций, абсолютно интегрируемых с квадратом.	2	3		6
6	Собственные интегралы и несобственные интегралы.	5	3		4
7	Интеграл Фурье.	4	6		7
8	Пространство основных функций и пространство обобщенных функций.	2	2		4
9	Преобразование Фурье обобщенных функций.	2	2		4
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

###### 1. Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций.

Лемма Римана. Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций, стремление их коэффициентов к нулю. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом через ядро Дирихле. Принцип локализации. Признаки Дини и Липшица сходимости рядов Фурье, следствия из признака Липшица. Равномерная сходимость рядов Фурье. Почленное интегрирование и дифференцирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. Ряды Фурье в комплексной форме.

###### 2. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических.

Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.

### 3. Метрические и линейные нормированные пространства.

Метрические и линейные нормированные пространства. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические пространства, полные линейные нормированные (баховы) пространства. Полнота пространства Неполнота пространства непрерывных на отрезке функций с интегральными нормами. Сравнение норм: сравнение равномерной сходимости, сходимостей в среднем и в среднем квадратичном. Полные системы в линейных нормированных пространствах.

### 4. Бесконечномерные евклидовы пространства.

Бесконечномерные евклидовы пространства. Ряд Фурье по ортонормированной системе. Минимальное свойство коэффициентов Фурье, неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Ортонормированный базис в бесконечномерном евклидовом пространстве. Гильбертовы пространства. Необходимое и достаточное условия для того, чтобы последовательность чисел являлась последовательностью коэффициентов Фурье элемента гильбертова пространства с фиксированным ортонормированным базисом. Связь понятий полноты и замкнутости ортонормированной системы.

### 5. Тригонометрические ряды Фурье для функций, абсолютно интегрируемых с квадратом.

Тригонометрические ряды Фурье для функций, абсолютно интегрируемых с квадратом. Полнота тригонометрической системы, равенство Парсеваля. Полнота системы полиномов Лежандра.

### 6. Собственные интегралы и несобственные интегралы.

Собственные интегралы, зависящие от параметра и их свойства. Несобственные интегралы, зависящие от параметра; равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости, признак Вейерштрасса. Признак Дирихле. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению определенных интегралов. Интегралы Дирихле и Лапласа. Интегралы Эйлера - гамма и бета-функции.

Выражение бета-функции через гамма-функцию.

### 7. Интеграл Фурье.

Интеграл Фурье. Представление функции интегралом Фурье. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства: непрерывность, стремление к нулю на бесконечности. Формулы обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

### 8. Пространство основных функций и пространство обобщенных функций.

Пространство основных функций и пространство обобщенных функций. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дельта-функция. Умножение обобщенной на бесконечно дифференцируемую. Сходимость в пространстве обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций.

### 9. Преобразование Фурье обобщенных функций.

Преобразование Фурье обобщенных функций. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная доской, мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

### **Основная литература**

1. Лекции по математическому анализу [Текст] : в 2-х ч. : учеб.пособ.для студ.вузов. Ч. 2 / Г. Е. Иванов .— М. : МФТИ, 2000 .— 230 с.
2. Курс математического анализа [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин .— 5-е изд. — М. : БИНОМ. Лаб. знаний, 2013 .— 672 с.
3. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : в 3 т. Т. 2 : Интегралы. Ряды : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев [и др.] .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2003, 2009, 2012 .— 504 с.
4. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : в 3 ч. Ч. 3 : Функции нескольких переменных : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев [и др.] ; под ред Л. Д. Кудрявцева .— М. : Наука : Физматлит, 1995 .— 496 с.
5. Краткий курс математического анализа [Текст] : учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев .— 3-е изд., перераб. — М. : Физматлит, 2002 ,2003, 2005 .— Т. 2 : Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ. - 2002. - 424 с.
6. Бесов О.В. Лекции по математическому анализу. – М.: Физматлит, 2014.
7. Петрович А.Ю. Лекции по математическому анализу. Ч.3. Кратные интегралы. Гармонический анализ. М.: МФТИ, 2013.
8. Яковлев Г.Н. Лекции по математическому анализу, Ч.2 – М.: Физматлит, 2002, 2004.

### **Дополнительная литература**

1. Курс математического анализа [Текст] : в 2 т. : учебник для вузов : доп. М-вом образования СССР. Т. 1 / С. М. Никольский .— 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1983 .— 464 с.
2. Курс математического анализа [Текст] : в 2 т. : учебник для вузов : доп. М-вом образования СССР. Т. 2 / С. М. Никольский .— 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1983 .— 448 с.
3. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] : учебник для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В.Фомин .— 7-е изд. — М. : Физматлит, 2004, 2006, 2009, 2012 .— 572 с.

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

1. <http://lib.mipt.ru/catalogue/1195/?page=0> – электронная библиотека Физтеха, раздел «Анализ. Учебники по элементарному анализу».
2. <http://www.exponenta.ru> – образовательный математический сайт.
3. <http://mathnet.ru> – общероссийский математический портал.
4. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
5. <http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
6. <http://www.i-exam.ru> – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Биотехнология  
**профиль подготовки:** Управление инновациями в бизнесе  
Физтех-школа бизнеса высоких технологий  
кафедра высшей математики  
**курс:** 2  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Экзамен

**Разработчик:** А.А. Скубачевский, канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Гармонический анализ» обучающийся должен:

### знать:

- основные факты теории тригонометрических рядов Фурье абсолютно интегрируемых функций: достаточные условия поточечной и равномерной сходимости;
- теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании, порядке убывания коэффициентов, теорему о суммировании рядов Фурье методом средних арифметических и ее применения;
- определение сходимости в метрических и линейных нормированных пространствах, примеры полных и неполных пространств;
- примеры полных систем в линейных нормированных пространствах;
- основные понятия теории рядов Фурье по ортонормированной системе в бесконечномерном евклидовом пространстве;
- определения собственных и несобственных интегралов, зависящих от параметра, их свойства; теоремы о непрерывности, дифференцировании и интегрировании по параметру несобственных интегралов, их применение к вычислению интегралов;
- достаточное условие представления функции интегралом Фурье;
- преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства;
- основные понятия теории обобщенных функций, преобразование Фурье обобщенных функций, его свойства.

### уметь:

- разлагать функции в тригонометрический ряд Фурье, исследовать его на равномерную сходимость, определять порядок убывания коэффициентов Фурье;
- исследовать полноту систем в функциональных пространствах;
- исследовать сходимость и равномерную сходимость несобственных интегралов с параметром, дифференцировать и интегрировать их по параметру;
- представлять функции интегралом Фурье; выполнять преобразования Фурье;
- оперировать с обобщенными функциями.

### владеть:

- мышлением, методами доказательств математических утверждений;
- навыками работы с рядами и интегралами Фурье в различных формах;
- навыками применения изученной теории в математических и физических приложениях;
- умением пользоваться необходимой литературой для решения задач.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы и учитываются в БРС.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течение учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умение решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Теорема Римана.
2. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом через ядро Дирихле.
3. Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье.
4. Теоремы Верьерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.
5. Неравенство Бесселя.
6. Равенство Парсеваля.
7. Теорема Рисса-Фишера.
8. Преобразование Фурье, обратное преобразование Фурье.

#### **Критерии оценивания**

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

#### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**



При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов. Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.

«СОГЛАСОВАНО»

Проректор по учебной работе

\_\_\_\_\_ А. А. Воронов

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2023

### Балльно-рейтинговая система оценки знаний студентов

Дисциплина: Гармонический анализ, 2 курс, 4 семестр, экзамен

Кафедра: высшей математики

№	Вид занятий	Сумма баллов
1.	Контрольная работа № 1 по 1 заданию	0 – 9
2.	Контрольная работа № 2 по 2 заданию	0 – 9
3.	Задание № 1 (тетрадь и ее защита)	0 – 3
4.	Задание № 2 (тетрадь и ее защита)	0 – 3
5.	Проверка теоретических знаний	0 – 3
6.	Работа на семинарах	0 – 3
7.	Итоговый контроль Экзамен (устный ответ)	0 – 70
	<b>ИТОГО</b>	<b>0 – 100</b>

Сумма баллов за устный ответ начисляется по формуле  $N \cdot 7$ , где  $N \geq 3$  – предварительная оценка за устный ответ по десятибалльной шкале. Если  $N = 1, 2$ , то итоговая оценка совпадает с  $N$ .

Соответствие оценок итоговой академической успеваемости балльно-рейтинговой системы.

Баллы БРС	Оценки	
93 – 100	10	отлично
86 – 92	9	
79 – 85	8	
72 – 78	7	хорошо
65 – 71	6	
58 – 64	5	
51 – 57	4	удовлетворительно
44 – 50	3	
30 – 43	2	неудовлетворительно
0 – 29	1	

Регламент принятия домашних заданий и проведения экзамена определяется «Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов на кафедре высшей математики».

Зав. кафедрой

\_\_\_\_\_

Г.Е. Иванов

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1**  
Дисциплина: ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Теорема (лемма) Римана. Стремление к нулю коэффициентов Фурье абсолютно интегрируемой функции.
2. Выяснить, полна ли система  $\{x^2, x^4, \dots, x^{2n}, \dots\}$  в  $C[-1, 1]$  и в  $C[1, 2]$ .
3. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Изобразить график интеграла Фурье функции  $f$ .

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 21**  
Дисциплина: ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Пространства основных и обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций.  $\delta$ -функция.
2. Выяснить, можно ли функцию  $f(x) = e^x \cos x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , представить равномерно сходящимся рядом Фурье по системе
  - а)  $\{\cos(2k - 1)x, k \in \mathbb{N}\}$ ,   б)  $\{\sin(2k - 1)x, k \in \mathbb{N}\}$ .
3. Вычислить  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{xe^x} dx, \quad \alpha > 0$ .